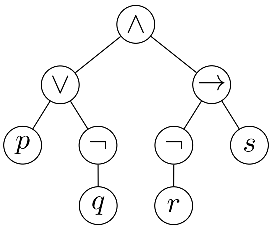
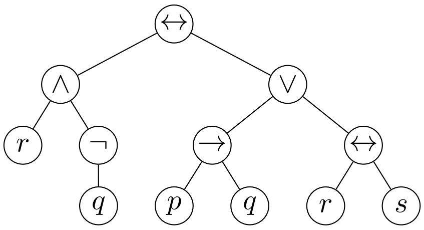
❑ Exercice 1 : *formules logiques*
Les expressions suivantes sont-elles des fes formules logique sur l'ensemble de propositions $V = \{p, q, r\}$? (on ne s'autorise pas dans cet exercice les simplfications d'écriture)

1. $(p) \vee \neg q$
2. $((p \wedge q) \vee (\top \wedge r))$
3. $(p \vee r) \wedge (\neg q))$
4. $(\neg(p \vee q)) \wedge \neg r)$
5. $((s \wedge t) \vee (p \wedge q))$

❑ Exercice 2 : *Représentation arborescente*

1. Représenter les arbres syntaxiques des formules logiques suivantes
   a) $(p \vee q) \rightarrow (r \wedge s)$
   b) $(\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (r \rightarrow s)$
2. Ecrire les formules formules logiques dont les arbres sont syntaxique sont
   a)

   b)


❑ Exercice 3 : *valeurs de vérité*

1. On considère la formule logique $P = ((p \rightarrow q) \vee (\neg p \wedge q)) \wedge (p \vee y)$, déterminer la valeur de vérité de P pour la valuation $\varphi(p) = F$ et $\varphi(q) = F$.
2. Dresser la table de vérité de P.

❑ Exercice 4 : *tautologies*
Montrer que les formules logiques suivantes sont des tautologies :

1. $(((x \rightarrow y) \wedge x) \rightarrow y)$
2. $((x \vee y) \equiv \neg(\neg x \wedge \neg y))$

❑ Exercice 5 : *connecteur de Sheffer*
On définit le connecteur de Sheffer (ou connecteur d'incompatibilité) par $x \uparrow y = \neg x \vee \neg y$.

1. Dresser la table de vérité du connecteur de Sheffer
2. Donner une equivalence logique de ce connecteur utilisant $\neg$ et $\wedge$.
3. Vérifier que $\neg x \equiv x \uparrow x$
4. En déduire une équivalence logique de $x \wedge y$, $x \vee y$, $x \rightarrow y$ qui n'utilise que le connecteur de Sheffer.
5. Démontrer par induction que tout formule logique peut s'écrire en utilisant uniquement le connecteur de Sheffer.
6. Donner une équivalence logique de $x \vee (\neg y \wedge z)$ utilisant uniquement le connecteur de Sheffer.

❑ Exercice 6 : *qui prend un dessert ?*
Trois personnes A, B et C mangent ensemble. On sait que :

— Si A prend un dessert alors B aussi

— B ou C prennent un dessert mais pas les deux

— A ou C prend un dessert

— si C prend un dessert alors A aussi

Déterminer qui prend un dessert en utilisant une table de vérité.

❑ **Exercice 7** : *footballeur* — CCINP sujet zéro

Un footballeur affirme à la presse :

1. Le jour où je marque un but, je suis content et je fais la fête.
2. Le jour où mon équipe gagne, ou bien je suis content, ou bien je fais la fête ou les deux.
3. Le jour où mon équipe perd, ou bien je ne suis pas content, ou bien j'ai marqué un but ou les deux
4. Le jour où je ne marque pas et je fais la fête, je suis content
5. Aujourd'hui, je ne suis pas content

1. Définir les variables propositionnelles nécessaires à la modélisation de ce problème.
2. Modéliser chacune des assertions à l'aide de formules propositionnelles.
3. Mettre chacune de ces formules en forme normale conjonctive
4. On souhaite savoir si le joueur a marqué, si son équipe a gagné et s'il a fait la fête. Donner la formule P permettant de répondre à ces questions. A quel problème classique est-on confronté ?
5. En appliquant l'algorithme de Quine, trouver une valuation qui rend P vraie.