

□ **Exercice 1** : *Définition et représentation d'un graphe non orienté*

On note :  $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  et  $A = \{ab, ac, bc, ef, gf, ed, ce, bg\}$

1. Représenter le graphe non orienté  $G = (S, A)$
2. Donner le degré de chaque sommet.
3. Donner la représentation de  $G$  sous forme de matrice d'adjacence.
4. Donner la représentation de  $G$  sous forme de listes d'adjacence.

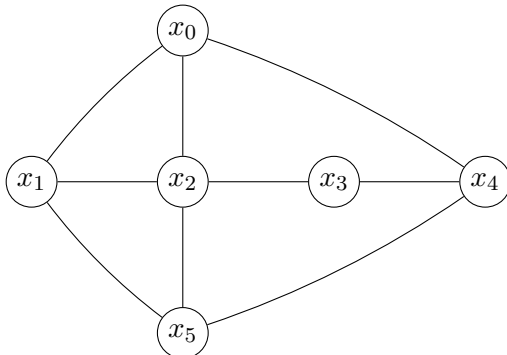
□ **Exercice 2** : *Définition et représentation d'un graphe orienté*

On note :  $S = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  et  $A = \{ab, ac, bc, ef, gf, ed, ce, bg\}$

1. Représenter le graphe orienté  $G = (S, A)$
2. Donner les degrés entrant et sortants de chaque sommet.
3. Donner la représentation de  $G$  sous forme de matrice d'adjacence.
4. Donner la représentation de  $G$  sous forme de listes d'adjacence.

□ **Exercice 3** : *Représentation d'un graphe*

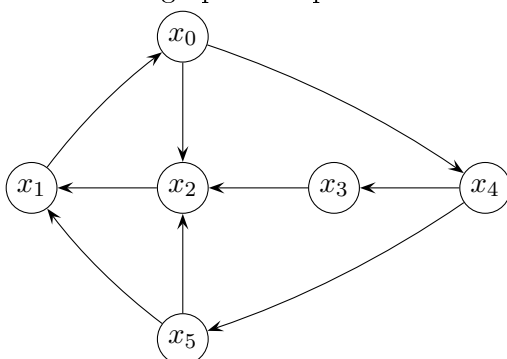
On considère le graphe suivant :



1. Donner sa représentation sous forme de matrice d'adjacence.
2. Donner sa représentation sous forme de listes d'adjacence.
3. Quel est le sommet de plus haut degré ? Donner la liste de ses voisins.

□ **Exercice 4** : *Représentation d'un graphe orienté*

On considère le graphe  $G$  représenté ci-dessous :



1. Donner sa représentation sous forme de matrice d'adjacence.
2. Donner sa représentation sous forme de listes d'adjacence.
3. Donner les degrés entrants et sortants de chaque sommet.
4. Donner  $\mathcal{V}_+(x_0)$  et  $\mathcal{V}_-(x_1)$
5. Dessiner le graphe dont la matrice d'adjacence est la transposée de celle de ce graphe.

□ **Exercice 5** : *Graphe régulier, graphe complet*

Les graphes considérés dans cet exercice sont non orientés. On dit qu'un graphe  $G = (S, A)$  est *régulier* lorsque tous ses sommets ont le même degré. Et on dit qu'un graphe est *complet* lorsque qu'il y a une arête entre tous les paires de sommets

1. Dessiner un graphe non orienté régulier de taille 6 dont les sommets sont de degré 3

2. Dessiner un graphe complet de taille 5
3. Déterminer le nombre d'arêtes du graphe complet à  $n$  sommets
4. Un graphe complet est-il régulier ?
5. Peut-on construire un graphe régulier de taille 5 dont tous les sommets sont de degré 3 ?
6. A quelle condition portant sur  $n$  et  $k$  peut-on construire un graphe régulier de taille  $n$  dont tous les sommets sont de degré  $k$  ?

□ **Exercice 6** : *Sommet isolé*

On dit qu'un sommet d'un graphe non orienté  $G = (S, A)$  est *isolé* lorsque son degré est nul.

1. Montrer qu'un graphe ne peut avoir simultanément un sommet isolé et un sommet de degré  $|S| - 1$
2. En déduire qu'un graphe a au moins deux sommets de même degré.

□ **Exercice 7** : *Parité*

Soit  $G = (S, A)$  un graphe non orienté, on note  $d(x)$  le degré d'un sommet  $x \in A$ .

1. Montrer que  $\sum_{x \in A} d(x) = 2|A|$
2. En déduire que  $G$  a forcément un nombre pair de sommets de degré impair

□ **Exercice 8** : *Un peu de dénombrement*

1. Montrer qu'il y a  $2^{\frac{n(n-1)}{2}}$  graphes non orientés à  $n$  sommets.
2. Déterminer le nombre de graphes orientés à  $n$  sommets.

□ **Exercice 9** : *Matrice d'adjacence et nombre de chemins*

Soit  $G = (S, A)$  et  $M$  sa matrice d'adjacence, le but de l'exercice est de calculer le nombre de chemins de longueur  $k$  entre deux sommets  $i$  et  $j$  d'un graphe qu'on notera  $c_{i,j,k}$ .

1. Montrer que  $c_{i,j,1} = M_{i,j}$
2. Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $c_{i,j,k} = M_{i,j}^k$  (on pourra raisonner par récurrence)
3. En supposant qu'on calcule  $M^k$  avec l'algorithme d'exponentiation rapide, donner la complexité de cette méthode pour calculer les  $c_{i,j,k}$